

ใบความรู้ที่ 11

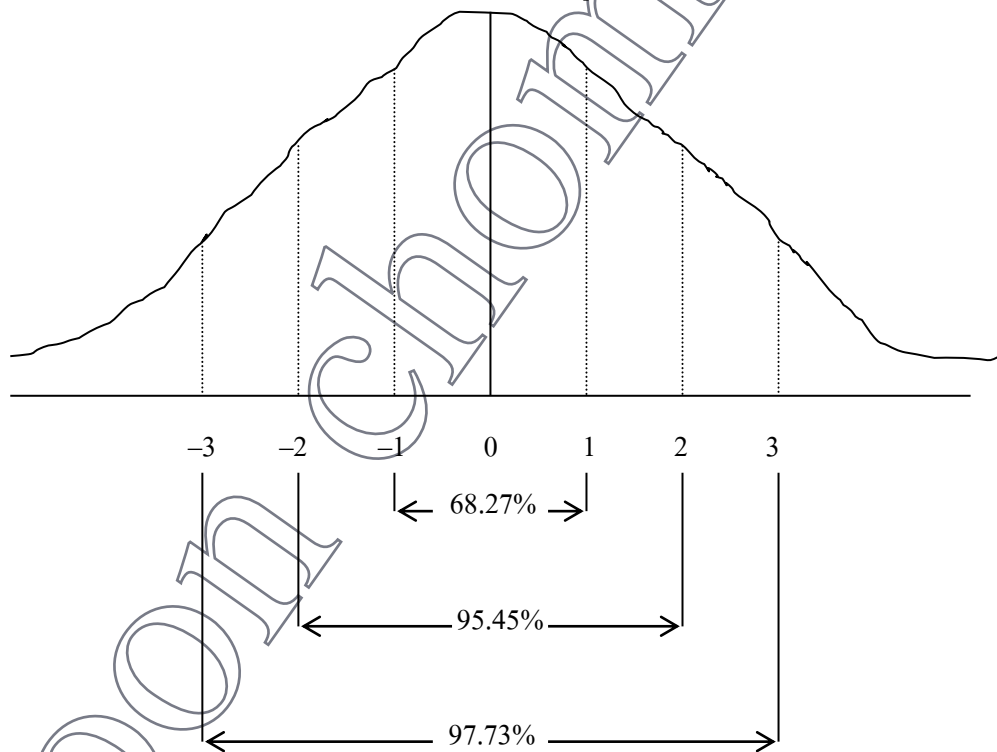
เรื่อง การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ

เส้นโค้งปกติ เป็นเส้นโค้งความถี่ของข้อมูลที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยมเท่ากัน โดยมีพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติประมาณเท่ากับ 1

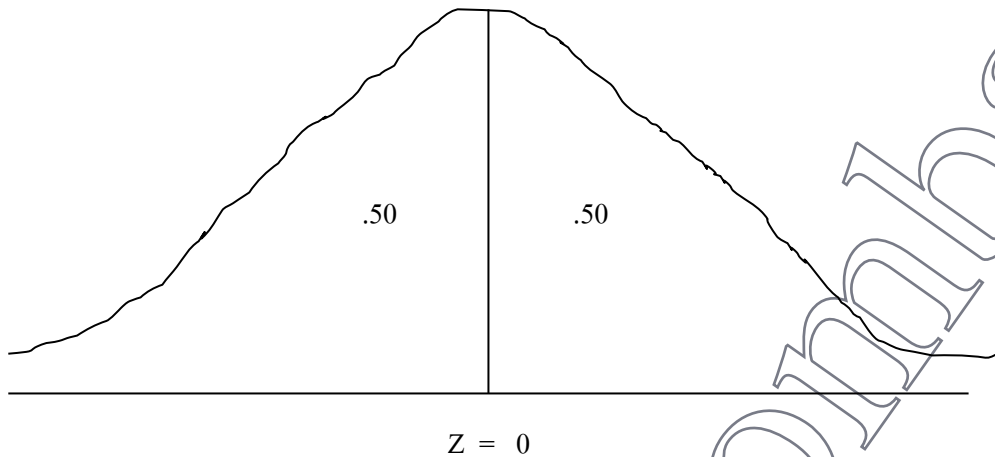
การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติทำได้โดยใช้ตาราง แสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติประกอบในการหา ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1

การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ

เส้นโค้งปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1 เรียกว่า เส้นโค้งปกติมาตรฐาน (Standard normal curve) ในการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง $Z = 0$ และ Z ใดๆ จะใช้ตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน ซึ่งแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $Z = 0$ และ $Z = 0.01, 0.02, \dots, 3.89$ พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน เป็นดังนี้



เนื่องจากพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติเท่ากับ 1 หรือ 100% เส้นสมมาตรที่ $Z = 0$ จะแบ่งพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติออกเป็น 2 ส่วน คือ 0.5 หรือ 50% ดังนี้



ตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ

1. ลักษณะของตาราง

ลักษณะของตาราง สำหรับการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ตามหนังสือ เรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของ สสวท. จะเป็นดังนี้

Z	A
0.00	0.0000
.01	.0041
.09	.0359
3.89	.5000

2. การหาพื้นที่จากตาราง จากตารางในข้อ 1 ถ้าของอยากทราบว่า $Z = 0.09$ จะมีพื้นที่เท่าใด เราก็ไปดูในตารางช่อง Z แถวที่ 0.09 ให้ตรงกับช่อง A ก็จะได้พื้นที่ตามต้องการ คือ 0.0359

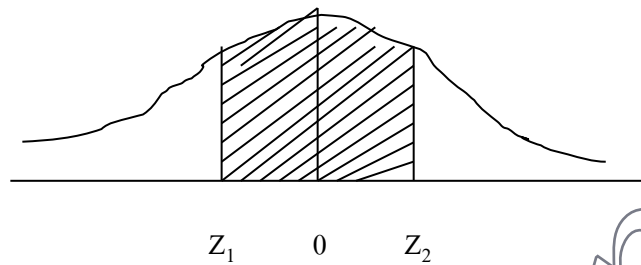
การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ

ในการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $x = x_1$ และ $x = x_2$ มีวิธีการหา ดังนี้

1) x_1 และ x_2 เปลี่ยนให้เป็นค่ามาตรฐาน Z_1 และ Z_2 ตามลำดับ โดยใช้สูตร

$$Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \quad \text{และ} \quad Z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

2) นำค่า Z_1 และ Z_2 ที่ได้ไปหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน จากตารางหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ดังรูป



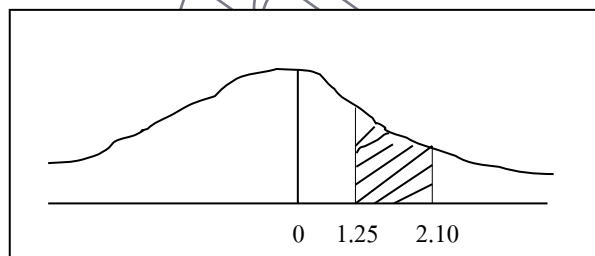
จะได้ว่า

พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง x_1 และ x_2 พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง Z_1 และ Z_2

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติต่อไปนี้

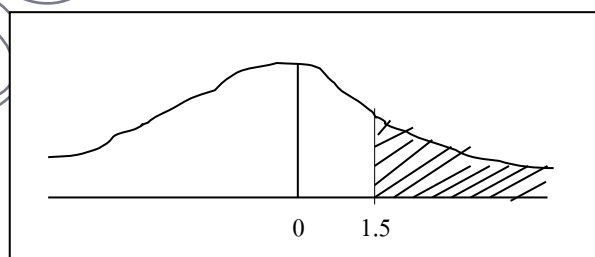
- 1) พื้นที่ระหว่าง $Z = 1.25$ และ $Z = 2.10$
- 2) พื้นที่ทางขวามือ $Z = 1.5$
- 3) พื้นที่ทางขวามือ $Z = -1.2$
- 4) พื้นที่ทางขวามือ $Z = 1.66$
- 5) พื้นที่ระหว่าง $Z = -0.57$ และ $Z = 1.05$

วิธีทำ 1)



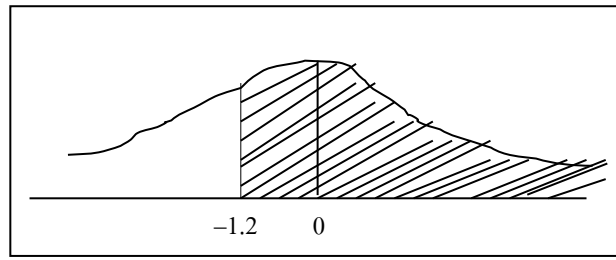
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ระหว่าง } Z = 1.25 \text{ และ } Z = 2.10 &= (\text{พื้นที่ระหว่าง } Z = 0 \text{ และ } Z = 2.10) \\ &\quad - (\text{พื้นที่ระหว่าง } Z = 0 \text{ และ } Z = 1.25) \\ &= 0.4821 - 0.3944 = 0.0877 \end{aligned}$$

2)



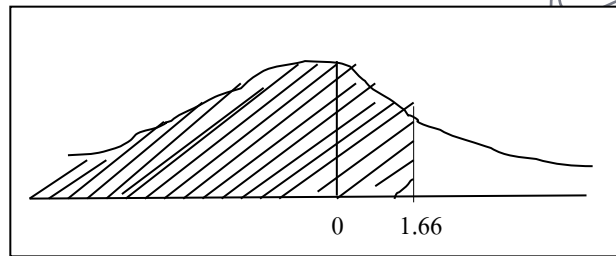
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ทางขวา } Z = 1.5 &= (\text{พื้นที่ทางขวาของ } Z = 0) - (\text{พื้นที่ระหว่าง } Z = 0 \text{ และ } Z = 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \end{aligned}$$

3)



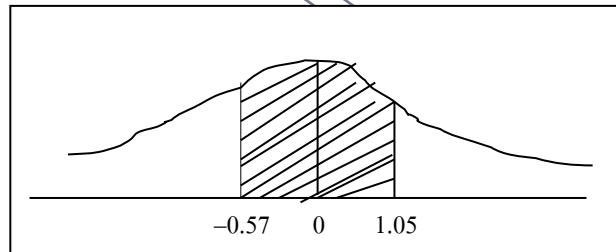
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ทางซ้ายของ } Z = -1.2 &= (\text{พื้นที่ระหว่าง } Z = -1.2 \text{ และ } Z = 0) + (\text{พื้นที่ทางขวาของ } Z = 0) \\ &= (\text{พื้นที่ระหว่าง } Z = 0 \text{ และ } Z = 1.2) + (\text{พื้นที่ทางขวาของ } Z = 0) \\ &= 0.33849 + 0.5 = 0.8849 \end{aligned}$$

4)



$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ทางซ้ายของ } Z = 1.66 &= (\text{พื้นที่ทางซ้ายของ } Z = 0) + (\text{พื้นที่ระหว่าง } Z = 0 \text{ และ } Z = 1.66) \\ &= 0.5 - 0.4515 = 0.9515 \end{aligned}$$

5)



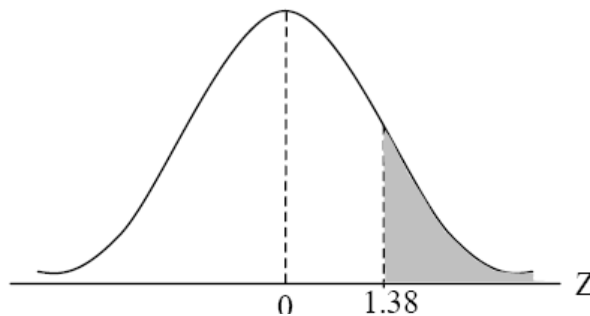
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ระหว่าง } Z = -0.57 \text{ และ } Z = 1.05 &= (\text{พื้นที่ระหว่าง } Z = -0.57 \text{ และ } Z = 0) \\ &\quad + (\text{พื้นที่ระหว่าง } Z = 0 \text{ และ } Z = 1.05) \\ &= (\text{พื้นที่ระหว่าง } Z = 0 \text{ และ } Z = 0.57) \\ &\quad + (\text{พื้นที่ระหว่าง } Z = 0 \text{ และ } Z = 1.05) \\ &= 0.2157 + 0.3531 = 0.5688 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 400 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 100 จงหาว่ามีกี่เปอร์เซ็นต์ของข้อมูลซึ่งมีค่า

- (1) มากกว่า 538
- (2) มากกว่า 179
- (3) น้อยกว่า 356
- (4) น้อยกว่า 621
- (5) ระหว่าง 318 และ 671
- (6) ระหว่าง 484 และ 565
- (7) ระหว่าง 249 และ 297

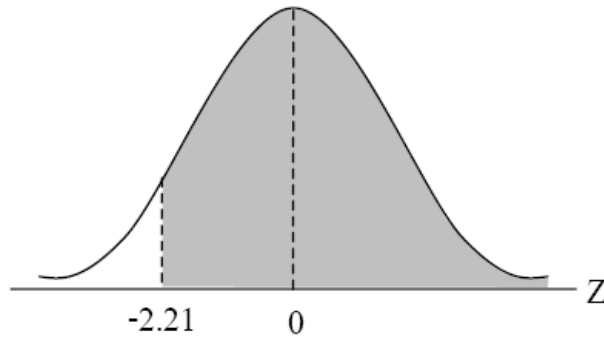
วิธีทำ (1) ให้ x เป็นค่าของข้อมูล โดยกำหนดให้ $\mu = 400$ และ $\sigma = 100$

$$\begin{aligned} \text{จาก } z &= \frac{x - \mu}{\sigma} \\ \text{จะได้ } z &= \frac{538 - 400}{100} \\ &= 1.38 \end{aligned}$$



จากตารางพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 1.38$ เท่ากับ 0.4162
ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติเมื่อ $z > 1.38$ เท่ากับ $0.5 - 0.4162 = 0.0838$
นั่นคือ มีข้อมูล 8.38% ของข้อมูลทั้งหมด มีค่ามากกว่า 538

$$\begin{aligned} (2) \text{ จะได้ } z &= \frac{179 - 400}{100} \\ &= -2.21 \end{aligned}$$

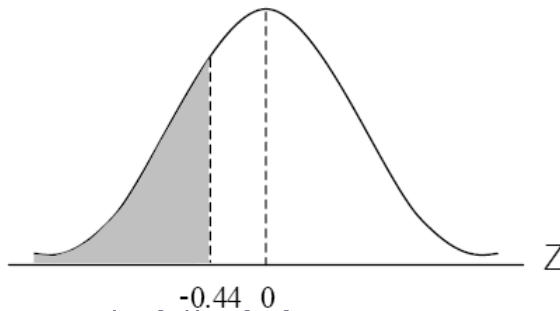


จะได้พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = -2.21$ ถึง $z = 0$ เท่ากับ 0.4864

ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ เมื่อ $z > -2.21$ เท่ากับ $0.5 + 0.4865 = 0.9864$

นั่นคือ มีข้อมูล 98.64% ของข้อมูลทั้งหมด มีค่ามากกว่า 179

$$\begin{aligned} (3) \quad \text{จะได้ } z &= \frac{356 - 400}{100} \\ &= -0.44 \end{aligned}$$

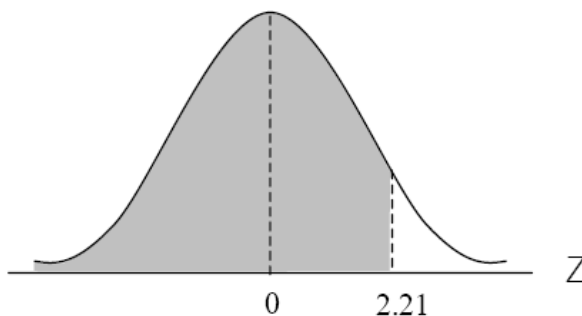


จะได้พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = -0.44$ ถึง $z = 0$ เท่ากับ 0.1700

ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ เมื่อ $z < -0.44$ เท่ากับ $0.5 - 0.1700 = 0.3300$

นั่นคือ มีข้อมูล 33% ของข้อมูลทั้งหมด มีค่าน้อยกว่า 356

$$\begin{aligned} (4) \quad \text{จะได้ } z &= \frac{621 - 400}{100} \\ &= 2.21 \end{aligned}$$



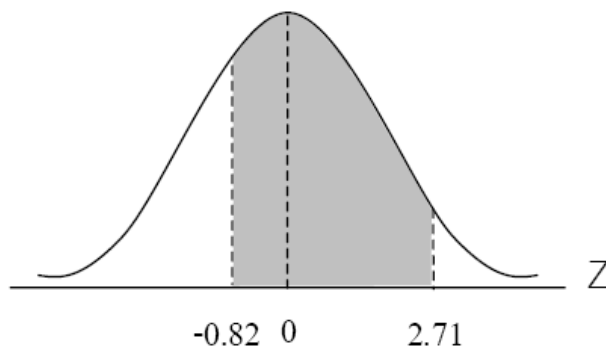
จากรายพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 2.21$ เท่ากับ 0.4864

ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ เมื่อ $z < 2.21$ เท่ากับ $0.5 + 0.4864 = 0.9864$

นั่นคือ มีข้อมูล 98.65% ของข้อมูลทั้งหมด มีค่าน้อยกว่า 621

$$(5) \quad \text{จะได้ } z_1 = \frac{318-400}{100} = -0.82$$

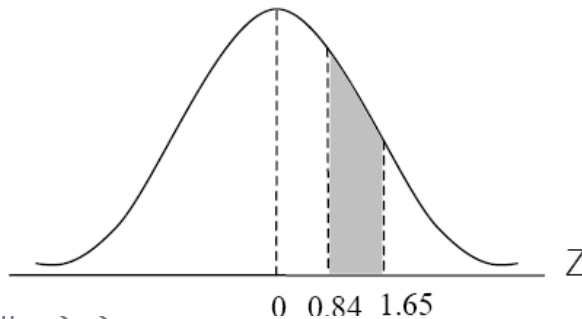
$$z_2 = \frac{671-400}{100} = 2.71$$



จากตาราง พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z=0$ ถึง $z=2.71$ เท่ากับ 0.4966
 จะได้พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z=-0.82$ ถึง $z=0$ เท่ากับ 0.2939
 ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ เมื่อ $-0.82 < z < 2.71$ เท่ากับ $0.4966 + 0.2939 = 0.7905$
 นั่นคือ มีข้อมูล 79.05% ของข้อมูลทั้งหมด มีค่าระหว่าง 318 และ 671

$$(6) \quad \text{จะได้ } z_1 = \frac{484-400}{100} = 0.84$$

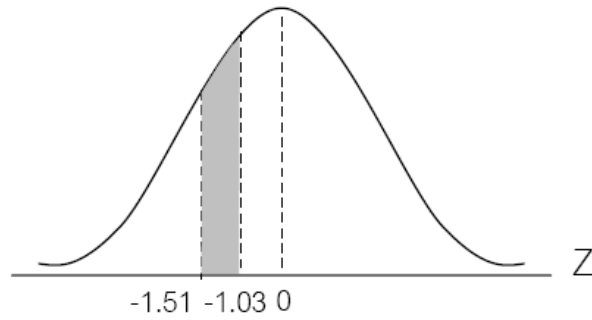
$$z_2 = \frac{565-400}{100} = 1.65$$



จากตาราง พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z=0$ ถึง $z=0.84$ เท่ากับ 0.2995
 จะได้พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z=0$ ถึง $z=1.65$ เท่ากับ 0.4505
 ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ เมื่อ $0.84 < z < 1.65$ เท่ากับ $0.4505 - 0.2995 = 0.1510$
 นั่นคือ มีข้อมูล 15.09% ของข้อมูลทั้งหมด มีค่าระหว่าง 484 และ 565

$$(7) \quad \text{จะได้ } z_1 = \frac{249-400}{100} = -1.51$$

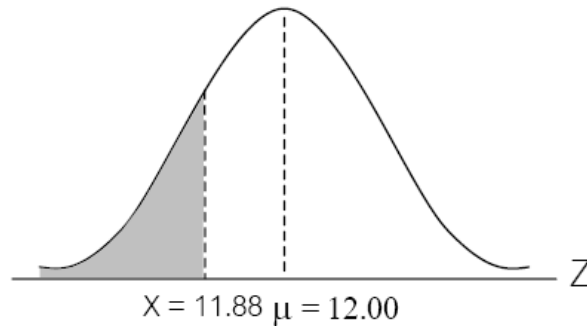
$$z_2 = \frac{297-400}{100} = -1.03$$



จากตาราง พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = -1.51$ ถึง $z = 0$ เท่ากับ 0.4345
 จะได้พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = -1.03$ ถึง $z = 0$ เท่ากับ 0.3485
 ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ เมื่อ $-1.51 < z < -1.03$ เท่ากับ $0.4345 - 0.3485 = 0.0860$
 นั่นคือ มีข้อมูล 8.6% ของข้อมูลทั้งหมด มีค่าระหว่าง 249 และ 297

ตัวอย่างที่ 3 น้ำหนักสุทธิของกระป๋องบรรจุถั่วที่ผลิตโดยบริษัทแห่งหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติโดยมีน้ำหนักสุทธิเฉลี่ยเป็น 12.00 กรัม ถ้ากระป๋องที่มีน้ำหนักสุทธิน้อยกว่า 11.88 กรัม มีอยู่ 11.51% จงหาความแปรปรวนของน้ำหนักสุทธิของกระป๋องบรรจุถั่วที่ผลิตโดยบริษัทนี้

วิธีทำ



จากรูป จะได้พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติจาก $x = 11.88$ ถึง $\mu = 12.00$ เท่ากับ $0.5 - 0.1151 = 0.3849$
 จากตาราง พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติเป็น 0.3849 ค่า z เท่ากับ 1.20

$$\begin{aligned} \text{จาก } z &= \frac{x - \mu}{\sigma} \\ -1.20 &= \frac{11.88 - 2.00}{\sigma} \\ \sigma &= \frac{-0.12}{-1.2} = 0.1 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความแปรปรวนของน้ำหนักสุทธิของกระป๋องบรรจุถั่วที่ผลิตโดยบริษัทนี้เท่ากับ 0.01

ตัวอย่างที่ 4 คะแนนสอบ SAT (SAT Scores) มีการแจกแจงแบบปกติโดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 505 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 111 จงหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติในข้อต่อไปนี้

- (1) คะแนน SAT อยู่ระหว่าง 400 และ 600
- (2) คะแนน SAT มากกว่า 700
- (3) คะแนน SAT น้อยกว่า 450

วิธีทำ (1) ให้ x เป็นคะแนนสอบ SAT โดยกำหนด $\mu = 505$ และ $\sigma = 111$

$$\text{จาก } z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\text{จะได้ } z_1 = \frac{400 - 505}{111} = -0.946$$

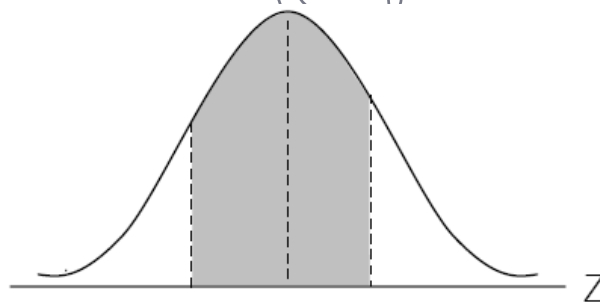
$$z_2 = \frac{600 - 505}{111} = 0.856$$

จากตาราง พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 0.94$ เท่ากับ 0.3264

พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 0.95$ เท่ากับ 0.3289

จะได้ พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 0.946$ เท่ากับ

$$0.3264 + \left(\frac{0.0025 \times 0.006}{0.01} \right) = 0.3279$$



จากตาราง พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 0.85$ เท่ากับ 0.3023

พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 0.86$ เท่ากับ 0.3051

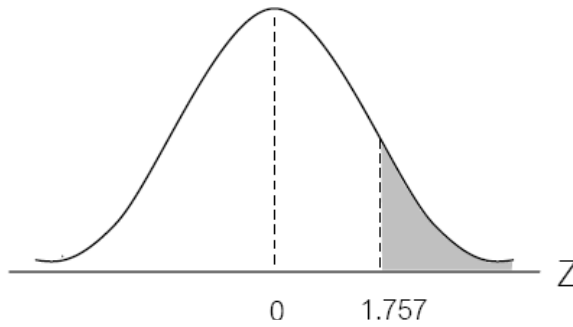
จะได้ พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 0.856$ เท่ากับ

$$0.3023 + \left(\frac{0.0028 \times 0.006}{0.01} \right) = 0.30398$$

ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติของคะแนน SAT ที่อยู่ระหว่าง 400 และ 600 เท่ากับ

$$0.3279 + 0.30398 = 0.63188$$

$$(2) \quad \text{จะได้ } z = \frac{700 - 505}{111} \approx 1.757$$



จากตาราง พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 1.75$ เท่ากับ 0.4599
พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 1.76$ เท่ากับ 0.4608

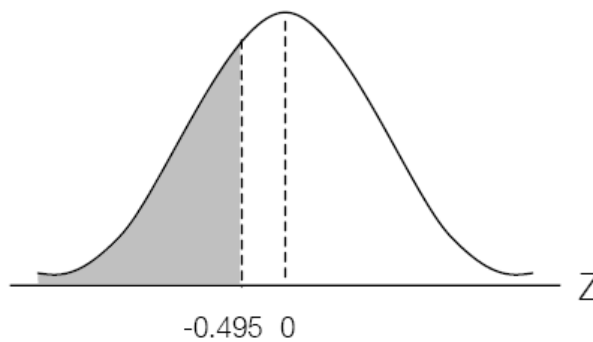
จะได้ พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 1.757$ เท่ากับ

$$0.4599 + \left(\frac{0.0009 \times 0.007}{0.01} \right) = 0.46053$$

ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติของคะแนน SAT ที่มากกว่า 700 เท่ากับ

$$0.5 - 0.46053 = 0.03947$$

$$(3) \quad \text{จะได้ } z = \frac{450 - 505}{111} \approx -0.495$$



จากตาราง พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 0.49$ เท่ากับ 0.1879

พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 0.50$ เท่ากับ 0.1915

จะได้ พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 0.495$ เท่ากับ

$$0.1879 + \left(\frac{0.0036 \times 0.005}{0.01} \right) = 0.1897$$

ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติของคะแนน SAT ที่น้อยกว่า 450 เท่ากับ

$$0.5 - 0.1897 = 0.3103$$